福建省《高等代数》与《线性代数》课程建设第十五次研讨会交流材料

矩阵相抵标准形的考研试题研究

朱荣坤
（集美大学理学院）

众所周知，矩阵标准形的研究是高等代数的核心内容，相关理论和方法几乎贯穿了整个课程. 矩阵标准形的主要类型有:相抵标准形，合同标准形，相似标准形，正交标准形及若当标准形. 其中，相抵标准形因涉及的条件少而极为常用，也是高等代数的考研热点之一. 本文结合自己的课程教学实践和体会，以命题形式给出一些考研试题的相抵标准形证法，进一步剖析矩阵相抵标准形的典型问题与方法，旨在抛砖引玉，共同促进教学研究.

相抵标准形定理　对任意的 $s\times n$ 矩阵 A，必存在 $s\times s$ 阶和 $n\times n$ 阶的可逆矩阵 P,Q 使得

$PAQ=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　其中 r 为 A 的秩. $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 称为 A 的相抵标准形.

相抵标准形可用于矩阵的秩、矩阵分解、矩阵方程等问题. 应用相抵标准形定理解决问题的一般思路是:先求出 A 的表达式，再恰当地分解、构造成“乘积”或“和”，使之符合题目要求. 其中的难点是恰如其分的分解、构造技巧.

命题1 设 A,B 分别是 $m\times n$ 、 $n\times s$ 阶矩阵，若 $AB=0$，则 $r(A)+r(B)\le n$.

本命题几乎在高等代数与线性代数的所有教材都会出现，是典型习题与常见结论. 一般的证法是根据线性方程组 $AX=0$ 线性无关的解个数为 $n-r(A)$，考虑到 B 的列向量组是 $AX=0$ 的解即可得证. 也可采用相抵标准形的方法证明如下

设 $r(A)=r$，则有可逆矩阵 P ,Q 使得 $PAQ=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

由 $AB=0$，有 $0=PAB=PAQQ^{-1}B=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}B_1$，得 $B_1=Q^{-1}B$ 的前 r 行全为零.

所以 $r(B)=r(B_1)\le n-r$.

命题2（云南大学）设 A,B 都是 n 阶矩阵, 且 $AB=0$，若 A 给定，则必存在满足题设的矩阵 B，使得 $r(A)+r(B)=k$，且自然数 k 满足 $r(A)\le k\le n$.

证明　设 $r(A)=r$，则有 $A=P^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}$. 对 $r\le k\le n$，取 $B=Q\begin{pmatrix} 0 & & \\ & E_{k-r} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 即证.

这里，矩阵 B 的构造是受到 A 的表达式特点及题目要求启发而得的.

类似可证:

秩为 r 的矩阵可以表示成 r 个秩为1矩阵之和.

若n阶矩阵A的秩为r，则存在n阶可逆矩阵P，使得PAP^{-1}的后面$n-r$行全为零.

命题3（矩阵的典型分解问题）任意方阵都可分解成一个可逆矩阵与一个幂等矩阵的乘积.

证明 利用$PAQ=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，作分解式$A=P^{-1}Q^{-1}\cdot Q\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}$即可.

命题4（厦门大学）设A是n阶矩阵，则$r(A)<n$（或$|A|=0$）当且仅当存在n阶非零矩阵B，使得$AB=BA=0$.

本命题如果仅仅是证明$AB=0$或者$BA=0$之一成立，那么只要利用线性方程组的非零解就容易构造矩阵B. 结论加强为$AB=0$且$BA=0$，则非零解构造法得到的B却无法同时满足两个等式. 于是仍然考虑相抵标准形的方法证明如下

设$r(A)=r$，则有n阶可逆矩阵P ,Q使得$A=P^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}$，令$B=Q\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}P$即证.

显然，矩阵B的构造是由A的表达式特点及题目要求而定的，虽然技巧性强，但也并非无规律可寻.

类似可证:

命题5（厦门大学）设A是n阶矩阵，求证存在n阶矩阵B，使得$A=ABA$且$B=BAB$.

有时，需要对标准形$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$或可逆矩阵$P$,Q作分块处理.

命题6（南京大学）$m\times n$矩阵A的秩为r当且仅当存在秩都是r的$m\times r$与$r\times n$矩阵M,N使$A=MN$.

证明 必要性. 若$r(A)=r$，则存在可逆的m阶矩阵P与n阶矩阵Q，使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

故 $A=P^{-1}\begin{bmatrix} E_r \\ 0 \end{bmatrix}(E_r,0)Q^{-1}=MN$，其中$M=P^{-1}\begin{bmatrix} E_r \\ 0 \end{bmatrix},N=(E_r,0)Q^{-1}$.

充分性. 此时$r(M)=r(N)=r$，则有可逆矩阵P,Q使得

$$PM=\begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix},B_r\text{是}r\text{阶可逆矩阵；}\quad QN'=\begin{bmatrix} C_r \\ 0 \end{bmatrix},C_r\text{是}r\text{阶可逆矩阵.}$$

于是$PAQ'=PMNQ'=PM(QN')'=\begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix}(C_r'0)=\begin{pmatrix} B_rC_r' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

由于$|B_rC_r'|\neq 0$，所以$r(A)=r(PAQ')=r$.

命题7 设$A^2=A$，证明：$r(A)=tr(A)$.

证明 设$r(A)=r$，则有可逆矩阵P,Q使得$A=P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$.

记 $P=\begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix},Q=\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix}$，其中$P_1,Q_1$为$r$阶矩阵.

则 $A=\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & 0 \end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix} P_1Q_1 & P_1Q_2 \\ P_3Q_1 & P_3Q_2 \end{pmatrix}$.

因为$A^2=A$，所以

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=P^{-1}A\cdot AQ^{-1}=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q\cdot P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Q_1P_1+Q_2P_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $tr(A)=tr(P_1Q_1)+tr(P_3Q_2)=tr(Q_1P_1)+tr(Q_2P_3)=tr(Q_1P_1+Q_2P_3)=tr(E_r)=r$.

命题8 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是线性空间$V$的基，$A$是$n\times s$矩阵，满足

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

证明：$\dim L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=r(A)$.

本命题是高等代数中综合性较强的的一道名题. 常规证法是假设A的前r列线性无关，进一步证明$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$恰好是$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$的极大线性无关组，证明过程较为烦琐. 另一种证法是利用同构思想，考虑向量β_i与其在基下的坐标即A的列向量A_i的对应关系是同构的，而同构关系保持线性关系不变，最终得证，但该证法思想“高级”，学生不易把握. 如果采用相抵标准形的方法，同样简洁且易理解.

证明 设$r(A)=r$，则存在可逆矩阵P,Q使$A=P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$.

设 $(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$，则$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$线性无关，且

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q=(\gamma_1,\cdots,\gamma_r,0,\cdots,0)Q.$$

而Q可逆，故得$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$的秩为$r$.

<u>定理备注</u>：由于相抵标准形是对矩阵A作初等变换得来的，因此根据证题的需要，标准形中E_r的位置实际上是可以任意选择.

命题9（浙江大学）设A,B都是n阶矩阵，且$r(A)+r(B)\le n$.

证明：存在n阶可逆矩阵M使得$AMB=0$.

证明 设$r(A)=r,r(B)=k\le n-r$，则存在n阶可逆矩阵P,Q,R,T使得

$A=P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q,B=R\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_k \end{pmatrix}T$，取 $M=Q^{-1}R^{-1}$即证.

本命题的难点和技巧在于另一个矩阵的相抵标准形的恰当选取. 实际上 E_k 的位置也可取在右上角或左下角，已知条件 $r(A)+r(B)\le n$ 即可保证两个标准形的乘积为0.

<u>小结</u>：相抵标准形方法的优势在于，矩阵的秩是矩阵相抵关系下的不变量，研究标准形比研究一般矩阵来得简单，因此往往可以把关于秩的问题归结为标准形的问题来处理，然后再返回到与它等秩的一般矩阵中去，这个推理模式可以简单地表示为“一般矩阵…标准形…一般矩阵”. 熟悉这种方法, 对解决矩阵的相关问题特别是秩问题，必将起到事半功倍的作用.